TITLE:
$\mathbb{R}^n$におけるNavier-Stokes方程式の弱解のL^2-decay(非線形発展方程式の理論と応用)

AUTHOR(S):
梶木屋, 龍治; 宮川, 鉄朗

CITATION:
梶木屋, 龍治 ...[et al]. $\mathbb{R}^n$におけるNavier-Stokes方程式の弱解のL^2-decay(非線形発展方程式の理論と応用). 数理解析研究所講究録 1985, 579: 91-100

ISSUE DATE:
1985-12

URL:
http://hdl.handle.net/2433/99282

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
579巻 1985年 91-100

R^nにおけるNavier-Stokes方程式の弱解のL^2-decay

広島大理 梶木屋龍治 (Ryuji Kajikiya)
広島大理 宮川鉄朗 (Tetsuro Miyakawa)

次のNavier-Stokes方程式の初期値問題を考える。

$$
(NS)\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u - \Delta u + (u,\nabla)u + \nabla p = 0 & \text{in } R^n\times(0,\infty) \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{in } R^n\times(0,\infty) \\ u(x,0) = a(x) & \text{in } R^n \end{cases}
$$

本稿では(NS)の弱解の$t\to\infty$のときの漸近挙動について述べる。Schonbek [8]は、$n=3$のとき、Caffarelli, Kohn, Nirenberg [1]によって構成された弱解に対してそのL^2-decayを考察した。彼女は初期値が$L^2\cap L^1$に属するとき[1]の弱解が$t\to\infty$のとき$t^{-\frac{1}{4}}$のorderで減衰することを示した。(Kato[3]も参照せよ。) 我々はこれを改良し、かつ一般化した結果を得た。実際$n\geq 2$ $a\in L^2\cap L^r$ $(1\leq^{\exists} r<2)$のとき[1]によって構成された弱解のL^2ノルムは$t\to\infty$のとき$t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{2})}$のorderで減衰することを示す。これは$n=3$, $r=1$のとき先にあげたorderよりも良い評価である。これは線形熱方程式の解と同じ減衰のorderである。

さらに[1]による弱解と、同じ初期値に対する線形熱方程式の解との差を評価する。これによって弱解がただ単にdecayするのではなく、熱方程式の解に近づいていきながら減衰するということがわかる。

§1 記号と定義　超関数の意味で $\mathrm{div}\, u=0$ なる $u\in(L^r(\mathbb{R}^n))^n$ の全体を L^r_σ で表す。同様に $u\in(H^1(\mathbb{R}^n))^n$ であって $\mathrm{div}\, u=0$ なる関数の全体を H^1_σ で表す。次の性質をもつ関数 u を(NS)の弱解と呼ぶ。

(i) $u\in L^\infty(0,T:L^2_\sigma)\cap L^2(0,T:H^1_\sigma)$ $(^\forall T>0)$ 及び

(ii) $\displaystyle\int_0^T\{-(u,\Phi_t)+(\nabla u,\nabla\Phi)+((u,\nabla)u,\Phi)\}dt=(a,\Phi(0))$

$^\forall T>0,\ ^\forall\Phi\in C^1([0,\infty):H^1_\sigma\cap L^n_\sigma),\ \Phi(t)\equiv 0\ (t\doteqdot T)$

ここに (u,v) は、L^r と $L^{r'}$ $(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1)$ の duality pairing である。

弱解に関しては、いくつかの構成の方法が知られている。[1]において次のような弱解が作られた。非線形項を時間遅れの入ったmollificationによって近似して、遅れ $\delta\to 0$ として弱解を求めようとするものである。

$$(1.1)\quad\begin{cases}\frac{\partial}{\partial t}u_k-\Delta u_k+(w_k,\nabla)u_k+\nabla p_k=0\\ \mathrm{div}\, u_k=0\ ,\quad u_k(x,0)=a(x)\qquad(k=1,2,\cdots)\end{cases}$$

ここで $w_k(x,t) \equiv \delta^{-n-1} \iint \psi\left(\frac{y}{\delta}, \frac{s}{\delta}\right) \tilde{u}_k(x-y, t-s)\, dy\, ds$, $\delta = \frac{1}{k}$

$$\tilde{u}_k(x,t) \equiv \begin{cases} u_k(x,t) & (t>0) \\ 0 & (t<0) \end{cases}$$

$0 \leqq \psi, \in C_0^\infty(R^n \times R)$, $\iint \psi\, dx\, dt = 1$, $Supp\, \psi \subset \{(x,t) : |x|^2 < t,\ 1<t<2\}$.

ψ の Support に注意すれば、$w_k(x,t)$ は $u_k(\cdot, s)$ の $s \in [t-2\delta, t-\delta]$ の値によってきまることがわかる。こうして (1.1) は時間遅れの入った方程式として解くことができる。このとき $\{u_k\}$ から適当な部分列 $\{u_{k_j}\}$ をとれば、それはある関数 u に $L^2_{loc}(R^n \times [0,\infty))$ の意味で収束する。u は (NS) の弱解になる。この弱解に対して我々は次のような decay の評価を得た。

§2 主結果

定理1 $n \geqq 2$ (i) $a \in L^2_\sigma$ のとき $\lim_{t \to \infty} \|u(t)\|_2 = 0$

(ii) $a \in L^r_\sigma \cap L^2_\sigma$ $(1 \leqq {}^\exists r < 2)$ のとき

${}^\exists C = C(n, r, \|a\|_r, \|a\|_2)$: $\|u(t)\|_2 \leqq C\,(t+1)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{2}\right)}$

[3] において、Leray の解([4]参照)に対して、$n \leqq 4$ のとき (i) が、$n \leqq 4$ かつ $1<r<2$ のとき (ii) が示されている。我々の結果は $n \geqq 5$ の場合や $r=1$ の場合なども含んでいる。次に $a \in L^2_\sigma$ を初期値とする線形熱方程式(R^n の場合には Stokes 方程式と一致する。)の解を $u_0(x,t)$ と表すと、

定理２ (iii) $a \in L^2_\sigma$ のとき $\|u(t)-u_0(t)\|_2 = o(t^{\frac{1}{2}-\frac{n}{4}})$ $(t\to\infty)$

(iv) $a \in L^r_\sigma \cap L^2_\sigma$ $(1 \leqq {}^\exists r < 2)$ のとき $\|u(t)-u_0(t)\|_2 = o(t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{2})})$ $(t\to\infty)$

[3]において次のような結果が示されている。

$$\|u(t)-u_0(t)\|_2 = O(t^{-\varepsilon}) \quad \text{for} \quad 0<\varepsilon<\frac{n}{4}-\frac{1}{2},\ n\leqq 4$$

(iii)はこれより精密な評価である。

§３ 定理の略証　(1.1)の各u_kに対してkに無関係な評価式を導く。この不等式において$k\to\infty$とすることによりuに対しての求めるべき評価式を得る。このようにして証明する。kを任意に固定し、$u=u_k$, $w=w_k$とかくと、(1.1)は次式になる。

$$(3.1)\quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt}+Au+P(w,\nabla)u=0 & ,\ t>0 \\ & u(0)=a\in L^2_\sigma \end{cases}$$

ここにPは$(L^r(R^n))^n$からL^r_σ $(1<r<\infty)$への射影であり、Aは$A=-\Delta$, $D(A)=(H^2(R^n))^n$なる作用素である。AとPは可換になる。Aのスペクトル分解を$A=\int_0^\infty \lambda\, dE(\lambda)$とする。定理を証明する前に補題を一つ準備する。

補題 ([2]参照)　(1) $\int_0^t \|w(s)\|_2^2 ds \leq \int_0^t \|u(s)\|_2^2 ds$

(2) $\|u(t)\|_2^2 + 2\int_0^t \|\nabla u(s)\|_2^2\, ds = \|a\|_2^2$

(3) $^\exists C = C(n) > 0$: $\|E(\lambda) P(w,\nabla) u\|_2 \le C \|w\|_2 \|u\|_2\, \lambda^{\frac{n+2}{4}}$ $(\lambda > 0)$

<u>定理1の証明</u>　簡単のために以下において、n, r, 初期値 aにのみ依存する定数は、すべてCとかく。(3.1)にuをかけてR^n上で積分すれば、

$$\frac{d}{dt}\|u\|_2^2 + 2\|A^{1/2}u\|_2^2 = 0$$

$\rho > 0$に対して $\|A^{1/2}u\|_2^2 \ge \int_\rho^\infty \lambda\, d\|E(\lambda)u\|_2^2 \ge \frac{\rho}{2}(\|u\|_2^2 - \|E(\rho)u\|_2^2)$

この不等式を使えば、

$$(3.2)\qquad \frac{d}{dt}\|u\|_2^2 + \rho\|u\|_2^2 \le \rho\|E(\rho)u\|_2^2$$

上式右辺を評価するため(3.1)を次式に書きなおす。

$$u(t) = e^{-tA}a + \int_0^t e^{-(t-s)A} F(w,u)(s)\, ds\ ,$$

$$F(w,u) = -P(w,\nabla)u\ .$$

ここに$\{e^{-tA};\ t \geqq 0\}$はAによって生成される半群である。

両辺に$E(\rho)$を作用させ補題を使えば

$$(3.3)\qquad \|E(\rho)u(t)\|_2 \le \|e^{-tA}a\|_2 + C\cdot\rho^{\frac{n+2}{4}}\int_0^t \|u(s)\|_2^2\, ds$$

補題(2)より $\|u(s)\|_2 \le \|a\|_2$ $(^\forall s \ge 0)$ が成り立つから、(3.2), (3.3)を使って $\rho = \alpha t^{-1}$ $(\alpha > 0)$ とおくと、

$$(3.4)\qquad \|u(t)\|_2^2 \le C[\alpha\cdot t^{-\alpha}\int_0^t s^{\alpha-1}\|e^{-sA}a\|_2^2\, ds$$
$$+ (\alpha+1-\tfrac{n}{2})^{-1}\alpha^{\frac{n+4}{2}}\, t^{1-\frac{n}{2}}] \qquad (^\forall \alpha > \tfrac{n}{2}-1)$$

この式から定理1(i)が出る。(ii)を示すには、次のよく知られた不等式を使う。

$$\|e^{-sA}a\|_q \le t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})}\|a\|_r \quad , 1\le r\le q\le\infty$$

これを(3.4)に適用すれば次の評価式が得られる。

(3.5) $$\|u(t)\|_2^2 \le C(t^{-n(\frac{1}{r}-\frac{1}{2})}\|a\|_r^2 + t^{1-\frac{n}{2}})$$

$n\ge3$ と仮定する。もし $n(\frac{1}{r}-\frac{1}{2})\le\frac{n}{2}-1$ ならば (3.5)式は(ii)が成り立つことを意味している。そうでないときは、$n(\frac{1}{r}-\frac{1}{2})>\frac{n}{2}-1\geqq\frac{1}{2}$ だからこの不等式(3.5)から

$$\|u(t)\|_2^2 \le C\, t^{-\frac{1}{2}}$$

が出てくる。これを(3.3)に代入して、(3.2)を使って前と同様に進めていくと、(3.5)より良い評価式

$$\|u(t)\|_2^2 \le C[t^{-n(\frac{1}{r}-\frac{1}{2})}+t^{-\frac{n}{2}}]$$

が得られる。これより(ii)が示される。

$n=2$ のときに(ii)を示す。この場合はもう少し複雑になる。それは $n=2$ のとき(3.5)式から解の減衰に関する情報が何も得られないためである。$n=2$ の場合には、強解の大域的存在、及び弱解のクラスでの解の一意性が知られている。([11])今後はこの解について考えるので(3.1)において $w=u$ とする。まず $a\in L^2_\sigma\cap L^r_\sigma$ $(1<{}^\exists r<2)$ の場合を考える。このとき $u(t)\in L^2_\sigma\cap L^r_\sigma$ $({}^\forall t\geqq0)$ なることが示される。([2]) 従って定理1(i)により今後 $a\in L^2_\sigma\cap L^r_\sigma$ かつ $\|a\|_2$ は十分小さいと

仮定してよい。次に $2<q<(\frac{1}{r}-\frac{1}{2})^{-1}$ なる q を固定して、$\|a\|_2$ が十分小さいことを使えば次の評価が得られる。(詳しい証明は[2]を見よ。)

$$\left[\int_0^t \|u(s)\|_2^q ds\right]^{1/q} \leq C\|a\|_r \cdot t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}+\frac{1}{2}}$$

従って(3.3)より

$$\begin{aligned}\|E(\rho)u(t)\|_2 &\leq t^{-(\frac{1}{r}-\frac{1}{2})}\|a\|_r + C\cdot\rho\cdot t^{1-\frac{2}{q}}\left[\int_0^t \|u(s)\|_2^q ds\right]^{2/q} \\ &\leq t^{-(\frac{1}{r}-\frac{1}{2})}\|a\|_r + C\cdot\rho\cdot\|a\|_r^2\cdot t^{2-\frac{2}{r}}\end{aligned}$$

(3.2)にこれを代入し、$\rho=\alpha\cdot t^{-1}$ $(\alpha>\frac{4}{r}-2)$ として $n\geqq 3$ のときと同様の手法により求める不等式が導かれる。最後に $n=2$, $r=1$ の場合を考える。$a\in L^2_\sigma\cap L^1_\sigma\subset L^2_\sigma\cap L^{4/3}_\sigma$ であるからすでに示したことから $\|u(t)\|_2^2\leq Ct^{-\frac{1}{2}}$ が出てくる。従って(3.3)により $\|E(\rho)u(t)\|_2\leq C(t^{-\frac{1}{2}}+\rho\cdot t^{\frac{1}{2}})$ が得られるので、これを(3.2)に代入し、$\rho=\alpha t^{-1}$ $(\alpha>1)$ として前と同様の論法により求める評価が得られる。

<u>定理2の証明</u>　$v(t)=u(t)-u_0(t)$, $u_0(t)=e^{-tA}a$ とおくと、次の式が成り立つ.

$$(3.6)\qquad \frac{dv}{dt}+Av=-P(w,\nabla)u \quad, v(0)=0$$

$$\frac{d}{dt}\|v\|_2^2+2\|A^{1/2}v\|_2^2=2B(w,u,v),$$

ここで $B(w,u,v)=-(P(w,\nabla)u,v)=-((w,\nabla)u,v)$ である。簡単な計算により $B(w,u,v)=-B(w,v,u_0)$ がわかる。
$\|u_0(t)\|_\infty\le t^{-\frac{n}{2r}}\|a\|_r$ を使えば

$$2|B(w,v,u_0)|\le\|a\|_r^2\cdot\|w\|_2^2\,t^{-\frac{n}{r}}+\|A^{1/2}v\|_2^2$$

であるから次の式が成り立つ。

$$\frac{d}{dt}\|v\|_2^2+\|A^{1/2}v\|_2^2\le\|a\|_r^2\cdot\|w\|_2^2\cdot t^{-\frac{n}{r}}$$

定理1の証明と同じように $\|A^{1/2}v\|_2^2\ge\rho(\|v\|_2^2-\|E(\rho)v\|_2^2)$（$\rho>0$）を代入すれば、

$$\frac{d}{dt}\|v\|_2^2+\rho\|v\|_2^2\le\rho\|E(\rho)v\|_2^2+\|a\|_r^2\cdot\|w\|_2^2\cdot t^{-\frac{n}{r}}$$

(3.6) より $v(t)=\int_0^t e^{-(t-s)A}F(w,u)(s)ds$ であるから、補題を用いて

$$\|E(\rho)v(t)\|_2\le\rho^{\frac{n+2}{4}}\cdot C\cdot\int_0^t\|u(s)\|_2^2ds$$

従って、

$$\frac{d}{dt}\|v\|_2^2+\rho\|v\|_2^2\le C\cdot\rho^{\frac{n+4}{2}}\left(\int_0^t\|u(s)\|_2^2ds\right)^2+\|a\|_r^2\cdot\|w\|_2^2\cdot t^{-\frac{n}{r}}. \qquad (3.7)$$

(iii)を示す。$a\in L_\sigma^2$ を仮定する。$r=2$, $\rho=\alpha t^{-1}$ ($\alpha>\frac{n}{2}+2$) ととれば (3.7) より

$$\|v(t)\|_2^2\le Ct^{1-\frac{n}{2}}\left[\left(t^{-1}\int_0^t\|u(s)\|_2^2ds\right)^2+t^{-1}\int_0^t\|u(s)\|_2^2ds\right]$$

が得られる。$\|u(t)\|_2^2\to0$ ($t\to\infty$) であるから (iii) が成り立つ。(iv) を示すには $\rho=\alpha t^{-1}$ として (3.7) を今までと同様に変形する。その際に定理1 (ii) 及び補題 (1) に注意して $\|u(t)\|_2$, $\|w(t)\|_2$ を評価すれば次の命題が導かれる。（詳しい証明は [2] を見よ.）この命題から (iv) は明らかである。

命題　$a \in L^2_\sigma \cap L^r_\sigma$ $(1 \le {}^\exists r < 2)$ とする。$t \to \infty$ のとき

$$\|v(t)\|_2^2 = \begin{cases} O(t^{1+\frac{n}{2}-\frac{2n}{r}}) & (\frac{n}{r}-\frac{n}{2}<1) \\ O(t^{-1-\frac{n}{2}}(\log t)^2) & (\frac{n}{r}-\frac{n}{2}=1) \\ O(t^{-1-\frac{n}{2}}) & (\frac{n}{r}-\frac{n}{2}>1) \end{cases}$$

参考文献

〔1〕 L. Caffarelli, R. Kohn and L. Nirenberg : Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations. Comm. Pure Appl. Math. 35, 771-831 (1982)

〔2〕 R. Kajikiya and T. Miyakawa : On L^2 decay of weak solutions of the Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^n$. preprint

〔3〕 T. Kato : Strong L^p-solutions of the Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^m$, with applications to weak solutions. Math. Z. 187, 471-480 (1984)

〔4〕 J. Leray : Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. Acta Math. 63, 193-248 (1934)

〔5〕 J. L. Lions : Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Paris. Dunod et Gauthier-Villars 1969

[6] K. Masuda : Weak solutions of the Navier-Stokes equations Tôhoku Math. J. 36, 623-646 (1984)

[7] M. Reed and B. Simon : Methods of modern mathematical physics Vol. II. ; Fourier analysis, self-adjointness. New York-London-San Francisco : Academic Press 1975.

[8] M.E. Schonbek : L^2 decay for weak solutions of the Navier-Stokes equations. Arch. Rational Mech. Anal. 88, 209-222 (1985)

[9] M.E. Schonbek : Large time behaviour of solutions to the Navier-Stokes equations. preprint

[10] H. Sohr : On the decay of weak solutions of the Navier-Stokes equations. To appear in J. Funct. Anal.

[11] R. Temam : Navier-Stokes equations. Amsterdam : North-Holland Publ. Co. 1977.